椭圆的标准方程

课堂设计理念

授人于鱼不如授人于渔。通过创设符合学生认知规律的问题情景，挖掘学生潜能，使学生在做中学，学中思，亲身体会创造过程，充分展示思维差异，培养学生的自主探究能力，逻辑推理能力，真正体现学生学习知识过程中的主体地位。

教学目标：

1. 知识目标：

①进一步理解椭圆的定义；掌握椭圆的标准方程，理解椭圆标准方程的推导；

②能根据已知条件求椭圆的标准方程；能用标准方程判定是否是椭圆；

2. 能力目标：

① 学生感知数学知识与实际生活的密切联系，培养解决实际问题的能力；

②通过对椭圆标准方程的推导，帮助学生领会观察、分析、归纳，提高学生运用坐标法解决几何问题的能力及运算能力，并渗透数形结合和等价转化的数学思想方法。

3. 情感目标：

① 过主动探索，合作交流，感受探索的乐趣和成功的体验，体会数学的理性和严谨，增加学生的求知欲和自信心；感受数学美的熏陶。

③养成实事求是的科学态度和锲而不舍的钻研精神，形成学习数学知识的积极态度。

教学重点、难点及关键：

重点：椭圆的标准方程；

难点：椭圆标准方程的推导；

关键：创设椭圆的直观情境，结合建立坐标系的一般原则，从“对称美”和“简洁美”出发作必要的点拨，使学生顺利突破难点，掌握重点。

教学策略与学法指导：

教学策略：在教法上，主要采用探究性教学法和启发式教学法。以启发、引导为主，采用设疑的形式，逐步让学生进行探究性的学习。并在教学过程中根据实际情况及时地调整教学方案。

学法指导：通过创设问题情景、学生自主探究、展示学生的研究过程来激励学生的探索勇气。根据学生的认知情况和学生的情感发展来调整整个学习活动的梯度与层次，逐步形成敢于发现、敢于质疑的科学态度。

教学媒体选择与应用：使用实物投影及信息技术辅助教学。借助实物投影展示学生的解题思维及解题过程，突出学生的思维角度与思维认识，遵循学生的认知规律，提高学生的思维层次。

教学过程

一、创设情境，引入课题

情境 1 请同学们举出生活中与椭圆有关的实例（展示一些椭圆形物体图片）

情境 2 神州载人飞船顺利升空，实现多人多天飞行，标志着我国航天事业又上了一个新台阶，请问："神州飞船的运行轨道是什么？（动态展示"神州飞船"运行轨道）怎样才能精确地设计卫星运行的轨道？

为更好地研究椭圆，我们就必须了解、掌握一些必要的数学知识——椭圆的标准方程（**板书课题：椭圆的标准方程**）。只有熟练掌握椭圆的标准方程我们才能更好地设计、更好研究椭圆的性质。

设计意图：渗透爱国主义教育，让学生认识到学习椭圆的必要性，引出课题。

二、研讨探究，推导方程

1、知识回顾

问题 1：回忆求圆的方程的一般步骤是什么？（必修 2 中建系、设点、列式、化简、证明）

问题 2：复习回顾椭圆的定义（平面内到两个定点 F_1、F_2 的距离的和等于常数（大于 F_1F_2）的点的轨迹叫做椭圆，两个定点 F_1、F_2 叫做椭圆的焦点，两焦点的距离叫做椭圆的焦距）

2、研讨探究

问题 3： 设椭圆的两个焦点分别为 F_1、F_2，它们之间的距离为 $2c$，椭圆上任意一点 P 到 F_1、F_2 的距离的和为 2a （ 2a＞2c ）。本题中可以怎样建立直角坐标系？（坐标法的合理运用）

思考：如何建立坐标系，使求出的方程更为简单？

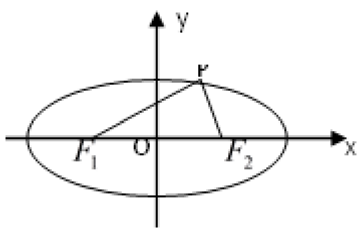
【设计意图】在学生复习圆的方程的建立过程的基础上，让学生讨论思考如何选择适当的坐标系来建立椭圆的方程，我想学生通过这些活动能够建立几种常见的坐标系，并列出相应的代数方程。我认为这样有利于培养学生的动手实验，分析比较，相互协作等能力，让学生体验到知识的产生过程。

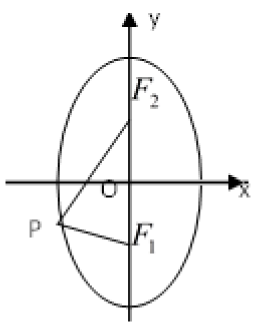
由学生自主提出建立坐标系的不同方法，结合建立坐标系的一般原则——使点的坐标、几何量的表达式简单化，并且从数学“对称美”、“简洁美”的角度出发作一定的点拨；若学生选取适当的坐标系都一样，教师多画几个坐标系，让学生选，注意要有中心在原点，焦点在 y 轴的坐标系；展开讨论哪种坐标系更合适；并提问：为什么选取这样的坐标系，依据是什么．并总结归纳以后建系要遵循的对称原则。

【设计意图】这里对椭圆的标准方程的建立没有墨守成规按教材给出的建系做 ，而是积极鼓励学生用不同建系方法，让他们充分暴露自然思维，以便了解学生的思维起点，让他们在自己认为简洁的坐标系下建立椭圆的方程。通过展示推导过程，比较化简结果，让学生明白哪种坐标系更合适，不用老师叮嘱，在以后的建系中，他自然会注意到平衡对称对简化问题的作用。这样，学生可以在对比、观察、思维的基础上提升自己的思维，使新知识与旧知识尽可能产生的联系，而不是被动地接受正确的结果，也就是说我们教学不但重结课，更重过程。

根据探究选定以下两种方案：

方案一　　　　　　　　　　　　方案二





按方案一、二建立坐标系，师生研讨探究椭圆标准方程

方案 1：如图，焦点落在 x 轴上

（1）建系：以 F_1、F_2 所在直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系 $x0y$；则 F_1、F_2 的坐标分别为$(-c，0)$，$(c，0)$.

（2）设点：设椭圆上任意一点 P 的坐标为$(x，y)$ ，

（3）列式：根据椭圆定义知： $PF_1 + PF_2 = 2a$

即：$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

学生可能认为，椭圆的方程已经求出，提出问题：你能否使方程更美一些？

【设计意图】抓住了学生的好奇心，激发了学生的兴趣，让学生体会方程化简的必要性。

（4）化简：$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

两边平方，得：$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$

即 $a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

两边平方，得：$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2(x-c)^2+a^2y^2$

整理，得：$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

先让学生尝试化简，再实物投影展示学生的化简过程，体现学生的思维认识，然后教师指出含有根式的化简规则。

【设计意图】由于化简两个根式的方程的方法特殊，难度较大，估计学生容易想到直接平方，这时可让学生预测这样化简的难度，从而确定移项平方可以简化计算。为此，我首先启发学生如何去掉根号较好，让学生动手比较，最后得出移项平方化简方程比较简单，这样有利于培养学生的分析比较能力，同时让学生体验化简方程的艰辛，经受锻炼，尝试成功，提高学生参与教学过程的积极性。

总结含有根式的化简步骤：

（1）方程中只有一个根式时，需将根式单独留在方程的一边，把其他项移到方程的另一边，然后两边平方；

（2）方程中有两个根式时，需将它们分别放在方程的两边，并使其中一边只有一项，再两边平方。

为使方程简单、对称、和谐，引入字母 b，令 $a^2-c^2=b^2(b>0)$，则方程可简化为：

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

整理成：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

此处 b 的引入是一个桥梁，也是有其特殊意义的，后面的学习中，我们会进一步研究其几何意义。

【设计意图】推导标准方程是本节课难点，建立直角坐标系是重要环节，在他们认为简洁的坐标系下建立椭圆的方程，在对比、观察的基础上提升自己的思维，新旧知识

衔接，而不是老师把经验强加给学生。尊重学生，使不同的层次的学生都得以发展，符合建构主义理论，同时体现了数学对称美和简洁美。

（5）**证明：讨论推导的等价性**

由上述过程可知，椭圆上的点的坐标(x,y)都满足上面这个方程；满足这个方程的点(x,y)都在已知的椭圆上。所以，这个方程就是所求得椭圆的方程.

【设计意图】养成学生扎实严谨的科学态度。

指出方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 就叫做椭圆的标准方程，焦点在 x 轴上，F_1 (-c,0)，F_2 (c,0)，这里 $c^2=a^2-b^2$

选定**方案二**建立坐标系，由学生比较、猜想，可得出 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$，同样也有 $a^2-c^2=b^2$ (b＞0)。

【设计意图】对于焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程的建立，我选择让学生在比较、分析、猜想得到。在得到焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程过程中，考虑到学生对这一标准方程可能有怀疑的情绪，我选择引导学生回到建立方程的起始，让学生对比分析原来两个方程只是交换两个变量。

教师指出：我们所得的两个方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 和 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）都是椭圆的标准方程（其中 $b^2=a^2-c^2$ ）。

三、归纳概括：方程特征

观察椭圆图形及其标准方程，师生共同总结归纳

（1）椭圆标准方程对应的椭圆中心在原点，以焦点所在轴为坐标轴；

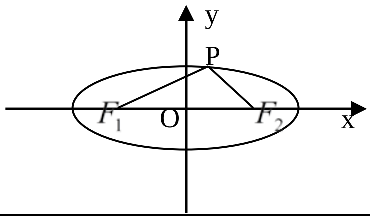
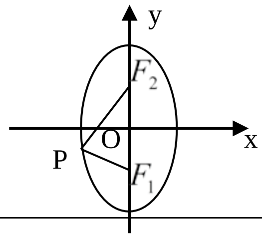
（2）椭圆标准方程形式：左边是两个分式的平方和，右边是 1；

（3）椭圆标准方程中三个参数 a,b,c 关系：$b^2=a^2-c^2$（$a^2=b^2+c^2$，a>b>0, a>c>0,b 与 c 大小不定）；

（4）椭圆焦点的位置由标准方程中分母的大小确定；

（5）求椭圆标准方程时，可运用待定系数法求出 a,b 的值。

在归纳总结的基础上，填下表

<table>
<tr><th></th><th>位置</th><th>焦点在 x 轴上</th><th>焦点在 y 轴上</th></tr>
<tr><td rowspan="3">不同点</td><td>标准方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$</td><td>$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$</td></tr>
<tr><td>图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>焦点坐标</td><td>$(\pm c,0)$</td><td>$(0,\pm c)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">相同点</td><td>定　义</td><td colspan="2">平面内到两个定点 F_1、F_2 的距离的和等于常数（大于 F_1F_2）的点的轨迹</td></tr>
<tr><td>a、b、c 的关系</td><td colspan="2">$b^2=a^2-c^2\ (a>b>0)$</td></tr>
<tr><td>焦点位置的判断</td><td colspan="2">分母哪个大，焦点就在哪个轴上</td></tr>
</table>

【设计意图】通过对比总结，强化不同类型的方程的异同，从而深化学生对椭圆标准方程的理解；通过讨论，学生自主学习，构建新的知识体系，不但能学习到真正属于自己的、可灵活运用的知识，而且在此过程中掌握求知的方法；通过讨论，利用类比的方法来深化学生对椭圆标准方程的理解。同时表格的展现，让学生一目了然，对比明显。进一步理解和区分椭圆标准方程的两种形式，揭示对立统一的规律，充分展现数形结合的思想，同时为以后解决求焦点坐标问题，提供了理论依据。

四、初步运用知识

1、判断下列方程是否为椭圆方程。若是，请确定 a, b, c 值并求出椭圆的焦点坐标。

$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$　　　$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$　　　$25x^2+9y^2=225$

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=6$

设计意图：让学生重新认识椭圆另一种表示形式——方程；掌握椭圆方程的结构及方程标准化的意识，区别圆与线段的方程形式。

2．填表：

方程	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$
焦点位置		
a		
b		
c		
焦点坐标		
到两焦点的距离和		

【设计意图】①以表格的形式更利于两种类型的椭圆方程的比较，强化概念；掌握两种类型的椭圆方程的异同和根据标准方程判断焦点位置的方法。

②同步练习，检测学生的掌握情况，及时反馈，强化知识点的学习，为下节课内容的学习打好基础；

③加深对所学知识的理解和运用，使学生掌握基础知识，利于学生思维能力的培养。

3．已知椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一点 P 到椭圆一个焦点的距离为 3，则 P 到另一焦点的距离为（　　）

（A）2　　（B）3　　（C）5　　（D）7

4. 已知椭圆的焦点在 x 轴上，焦距是 6，椭圆上一点到两个焦点的距离之和是 10，写出这个椭圆的标准方程。

[**变式** 1]将条件“焦点在 x 轴上”去掉，结论又是如何？**（提问）**

【设计意图】通过变式训练来强化概念，开拓学生的思维，训练学生思维的严谨性；

[**变式** 2]已知一个油车上的贮油罐横截面的外轮廓线是一个椭圆，它的焦距为 2.4m，外轮廓线上的点到两个焦点距离的和为 3m，求这个椭圆的标准方程。

强调三点：一建标；二根据焦点建模；三根据条件和定义定 a，b，c

【设计意图】⑴进一步熟悉椭圆的焦点位置与标准方程之间的关系；

⑵掌握运用待定系数法求椭圆的标准方程，解题时强调“二定”即定位定量；

⑶培养学生运用知识解决问题的能力。

5．方程$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{3}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆，则$a$的取值范围为：$(3,+\infty)$

6．写出适合下列条件的椭圆的标准方程

① a=4，b=3，焦点在 x 轴

② $\boldsymbol{b=1,c=\sqrt{15}}$，焦点在 y 轴上；

③两个焦点的坐标是（-2，0）和（2，0）并且经过点（2.5，-1.5）

【设计意图】①这个环节结合教学目标对教材例题、习题进行了重组和加工，以学生的练习、感悟为主，不预设例题，那个题目需要分析、讲解由课堂实际而定，另外练习尽可能体现题形多样性和层次性，以满足不同层次的学生的需要。分析解答中注意发现学生思维的闪光点，注意不同思维、方法的碰撞。

②不同于以往，这个环节通过放手让学生自己练习、感悟，让学生在“游泳中学会游泳”，以增强对学生能力培养的针对性和实效性。

③5、6 两题由教师根据课堂时间灵活掌控。

五、回顾反思，提高认识

1、你可以从那几个方面来判断某曲线是否为椭圆？

提示：一形状；二定义（根本）；三方程（标准方程与根式）

2、你认为椭圆的标准方程有哪些优越性？（数形结合）

3、你认为求椭圆方程主要把握那几个方面？

提示：焦点定标准方程的类型；椭圆的定义的量与 a,b,c 的关系

【设计意图】为了让学生建构自己的知识体系，我让学生自己概括所学的内容。我认为这样既能培养了学生的概括能力，又能营造民主和谐的师生关系。

六、课后作业

必做:课本课后习题 1、2（1）（2）；

选做：2（3）（4）

1.如果方程$x^2+ky^2=1$表示焦点在y轴上的椭圆，那么实数k的取值范围是（　　）

（A）（0，+∞）　（B）（0，2）　（C）（1，+∞）　（D）（0，1）

2.方程$Ax^2+By^2=1$什么时候表示椭圆？什么时候表示焦点在x轴上的椭圆？什么

时候表示焦点在 y 轴上的椭圆？

【设计意图】体现分层教学的思想，使各层次的学生都找到各自的学习区，进一步完善教学目标的实现

教学设计说明

本节课的设计力图贯彻“以人的发展为本”的教育理念,体现“教师为主导,学生为主体”的现代教学思想。椭圆是圆锥曲线中重要的一种，本节内容的学习是后继学习其它圆锥曲线的基础，坐标法是解析几何中的重要数学方法，椭圆方程的推导是利用坐标法求曲线方程的很好应用实例。本节课内容的学习能很好地在课堂教学中展现新课程的理念，主要采用学生自主探究学习的方式，使培养学生的探索精神和创新能力的教学思想贯穿于本节课教学设计的始终。

椭圆方程的化简是学生从未经历的问题，是本课的难点，方程的推导过程采用学生分组探究，师生共同研讨方程的化简和方程的特征，可以让学生主体参与椭圆方程建立的具体过程，使学生真正了解椭圆标准方程的来源，并在这种师生尝试探究、合作讨论的活动中，使学生体会成功的快乐，提高学生的数学探究能力，培养学生独立主动获取知识的能力，增强了学生战胜困难的意志品质并体会数学的简洁美、对称美.通过讨论椭圆方程推导的等价性养成学生扎实严谨的科学态度。

设计习题的研讨探究变式训练，是为了让学生能灵活地运用椭圆的知识解决问题，同时也是为了更好地调动、活跃学生的思维，发展学生数学思维能力，让学生在解决问题中发展学生的数学应用意识和创新能力，同时培养学生大胆实践、勇于探索的精神，开阔学生知识应用视野。课后分层次布置作业,帮助学生巩固所学知识;课后探索更为学有余力的学生留有进一步探索、发展的空间.在教学中借助多媒体生动、直观、形象的特点来突出教学重点。自始至终很好地调动学生的积极性,挖掘他们的内在潜能,提高学生的综合素质。