中国核心期刊数据库来源期刊
中国基础教育知识仓库来源期刊

ISSN 1672-7495
CN 31-1572/G4

上海中学数学

SHANGHAI ZHONGXUE SHUXUE

反映教改新动态　传递教学新信息

ISSN 1672-7495

上海市教育委员会主管
上海师范大学主办

2023年
8月
7—8

上海中学数学

2023 年第 7-8 期　2023 年 8 月
总第358-359 期
月刊，1979 年创刊

主管单位：上海市教育委员会
主办单位：上海师范大学
出版单位：《上海中学数学》编辑部
地　　址：上海市徐汇区桂林路100号
上海师范大学数学系
《上海中学数学》编辑部
印刷单位：上海万卷印刷股份有限公司
发行单位：上海市报刊发行局
发行范围：国内外公开发行
订　　阅：全国各地邮政局(所)
国内发行代号：4-369
国外发行代号：BM5400
邮政编码：200234
电　　话：021-64321027
投稿网址：http://shzxsx.shnu.edu.cn
投稿邮箱：shzxsx@shnu.edu.cn
出版日期：2023.8.20
定　　价：18.00元

ISSN 1672-7495
CN 31-1572/G4

目　次

明确探究方向　积累活动经验

214400　江苏省江阴市敔山湾实验学校　周建香
214400　江苏省江阴市教师发展中心　王俊蓉

摘　要:中考二轮复习关注探究经验的积累.通过专题研究引领学生探究新问题、攻克新疑难,通过专题主题式探究推陈出新、驾驭新问题,促进数学理解.在课堂行进过程中不断建立新问题与初中阶段基础知识、基本方法的内部关联,从代数思想方法的高度引领数形结合的实践理解,重视代数表达对数学问题解读的重要引领作用.实际教学中,重点引导学生在层层递进的数学问题中确定新问题探究方向,指导学生在探究活动中从分散到集中逐步积累活动经验,增强探究力、理解力.

关键词:探究方向;活动经验

笔者最近持续开展个人专项课题"引导初中学生在有方向的探究中积累数学活动经验的实践研究"的研究,对初中三个年级的数学课型进行了分类.本文所述内容属于"中考二轮复习专题探究"的一大类,笔者围绕相关原创案例,阐述教学实践中如何确定探究方向、积累活动经验.

1　甄选探究专题,预设探究活动

进入二轮复习,学生需要进行知识与方法的整合,要选取契合学生需求的专题展开探究式研究.专题问题设置应建立在基础问题与基础模型之上,但又要有一定程度的综合性,要有利于学生深入思考.学生通过问题理解与解决,能有效提升思维能力,要在探究过程中提升学生分析、运算和表达的能力,引导学生更深刻理解数学学科,提升数学素养,积累探究经验.另外,设置的探究性问题要新颖、有创意,有启发性和引领性.

经过研究比较,笔者最终选择代数专题,对一类形如 x^2+y^2 的代数式进行最值研究,探究此类代数式最值时不仅可以从代数表达的视角,还可以结合图形多角度观察、比较、融合、转化,最终确定求值策略.

这种代数类专题属于新问题探究,探究活动的设计要能够具有引导性,引导学生解决问题时主动回到基础知识,运用基本方法,构建基础问题模型,在活动中逐步确认问题解决的基本策略,在此基础上适应有关的变式,逐步深入问题模型,强化问题解决策略,建立代数与几何的良好沟通,将问题转化.因此,探究活动需要有梯度、有内涵、有驱动力.

2　呈现探究引例,探索活动路径

二轮复习也要基础为先,一节专题研究课依然要从小微问题切入,给学生一个可以进入问题内部的契机.而且,引例问题的解决方案要具有发散性,引发学生对基础知识、基本方法的比较与思考,引导学生运用代数思想、借助函数解决数学问题,为后续的解决策略聚焦提供思维路径.这里要注意的是引例的解决应彻底,留下深刻的思维印记,有助于培养思维广阔性.

问题1(尝试解决)　已知 $x+y=2$,求 x^2+y^2 的最小值.

设计意图:问题1的设计意在尽可能地引发学生多视角解析.

视角1:将 $x+y=2$ 视作方程进行变形,代入 x^2+y^2 进而引导代数式再构造.由 $x+y=2$ 得 $y=2-x$,代入 x^2+y^2 得 $x^2+y^2=x^2+(2-x)^2=2(x-1)^2+2$,故当 $x=1$ 时 x^2+y^2 有最小值2.

这里将问题转化为二次函数问题来解决,体现了函数建模思想,也融入了等式、方程、代数式等的关联互化,需要综合考察,思维清晰,方向明朗.

视角2:将 $x+y=2$ 视作函数,借助函数图像构造进而观察定解.将 $x+y=2$ 视作一次函数 $y=2-x$,在平面直角坐标系中画出其图像(如图1所示).

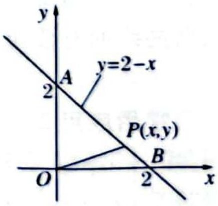


图1

图1中,$P(x,y)$ 是直线 $y=2-x$ 上的任意一点,此时 $x^2+y^2=(x-0)^2+(y-0)^2$,所以 x^2+y^2 表示点 $P(x,y)$ 到 $O(0,0)$ 的距离的平方,由图知,当 $OP\perp AB$ 时 OP 最小,此时 $OP=\sqrt{2}$,故 $OP^2=2$,x^2+y^2 的最小值是2.

这里借助几何直观,将数与式的问题转化为对形的观察,通过两点间距离公式构建新的数式视角,最终将代数式最值问题转化为线段长度的取值范围问题.在问题转化过程中,不断转换代数、几何图形

的观察视角，将数与形紧密结合，将最基础的代数式模型与最简洁的距离模型相融合，以开阔数学思维.

视角3：将 x^2+y^2 补形为方程，同时将 $x+y=2$ 视作方程变形代入，进而借助方程解的存在性求解.令 $x^2+y^2=t$，将 $y=2-x$ 代入构造方程 $x^2+(2-x)^2=t$，$2x^2-4x+4-t=0$，由于此方程有解，得出 $\Delta\geqslant 0$，解得 $t\geqslant 2$，故 t 的最小值是2.

这里，借助代数式反向构造方程，将原代数式看作一个整体，也就是目标函数，回到方程视角观察解的存在性，最后运用不等式知识解决最值问题.在这一轮的设计中，强调代数建模思想的重要性，无论是方程还是不等式，都将积极与函数相关联，体现目标函数对于数学观察视角的重要引领作用，展现代数应用的关联延展性.

视角总析：综观上述三种解法，散而不乱，不难发现函数思想在方程、不等式、代数式应用中的统领作用，所以，要培养学生在问题分析理解过程中带有函数建模的眼光，要心理预设适当的目标函数作为研究方向，将代数思想解决数学问题落到实处.

3 变式探究引例，初阶活动经验

二轮复习是专题复习，要求整个专题围绕核心主题，形散而神聚.本专题中代数思想方法要与几何构造相关联，预设变式问题的意图就是要引导学生比较甄别，当问题载体发生变化时，思想方法的不变性会引导学生调用解决问题的经验，从而将引例中爆发出的思维链接到变化的问题中，指引学生肯定并运用已有活动经验，打造深刻的数学思维.

追问(用适当方法解决) 已知 $3x+4y=12$，求 x^2+y^2 的最小值.问：你会选择哪种视角解决？

设计意图：借助追问，引发学生思辨比较，从不同视角解读、解决此问题.与上述问题1相比较，学生面对繁简不一的解题过程可以有自主选择的意向.但教师此时不必过于强调采用哪种视角一定是最好的，这些感受需要学生在解题中积累、比较、甄选，直到产生清晰的探究方向，知晓建立目标函数解决问题来降低难度、用函数来关联代数思想，达到一定的思维高度.

中考链接(2013无锡中考-18) 已知点 D 与点 $A(8,0)$，$B(0,6)$，$C(a,-a)$ 是一平行四边形的四个顶点，则 CD 长的最小值为________.

设计意图：呈现无锡市往届相关考题，寻找考题与本课引例之间的一致性特征，都是将数与形较好地进行结合，都可以借助代数表达解析图形变化，借助目标函数进行数量解析，最终用代数思想引领图形观察，用函数统领代数式、不等式综合解决问题，感受问题探究的必要性.

4 确认探究方向，进阶活动经验

探究活动是形成并积累活动经验的载体，通过探究活动的变换与升级，促进学生主动关联活动内涵，探求问题本质，把新问题化归到已经解决的已知问题领域，从而由原先的发散思维模式慢慢集中到共性问题特征研究及共性解决策略分析.由此，引例与变式追问的活动经验会汇聚成初步问题模型，学生通过这些经验，再次确认探究经验的有效性、实用性，与之相关的问题探究逐步有了方向感，活动经验也得以深化.

问题2(进阶表达) 已知点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，以点 $C(3,3)$ 为圆心、半径为1的圆上有一动点 P，求 PA^2+PB^2 的最小值.

设计意图：假设动点 $P(x,y)$，设计点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，目的是在代数表达 $PA^2+PB^2=2(x^2+y^2)+8$ 之后，能从中看出这里含有的 x^2+y^2 表示点 $P(x,y)$ 到 $O(0,0)$ 的距离的平方，回到引例即可解决问题.新问题出现，关键是引导学生进行目标函数的建构，鼓励学生用函数建模的眼光审视并设法解决问题，在这一系列探究过程中，综合运用代数几何知识的要求比较高，也正是如此，才能借助这样的新题探究提升学生的思维力，引导学生理性面对新问题，克服新困难，树立运用基础知识、基础模型解决问题的数学价值观.

5 确定探究方向，高阶活动经验

数学活动经验的形成需要思维过程的不断推进，在探究活动进展过程中，有目标、有方向的思考尤为重要.此时不断变换问题的背景，更新问题的潜在知识背景，将问题的综合性再次提升.学生在这种知识技能要求逐渐综合的情境下必然会运用固有经验，会判定探究思考的方向是否准确，这一步便可以在思维层面确定探究方向，并在潜意识里融合已有问题的活动经验解决问题.从数学思维角度看，此时活动经验的形成更利于形成独立的、理性的思维.

变式1(探索求同) 已知点 $A(-3,0)$，$B(1,0)$，以点 $C(3,3)$ 为圆心、半径为1的圆上有一动点 P，求 PA^2+PB^2 的最小值.

设计意图：假设动点 $P(x,y)$，设计点 $A(-3,0)$，$B(1,0)$，目的是在代数表达 PA^2+PB^2 后，能用配方视角整理观察其结果 $2[(x+1)^2+(y-0)^2]+8$，从中看出这里含有的 $(x+1)^2+(y-0)^2$ 表示点 $P(x,y)$ 到 $(-1,0)$ 距离的平方，而 $(-1,0)$ 正是点 $A(-3,0)$，$B(1,0)$ 的中点坐标，这样就在表达层面进行了升格，引入配方变形运算，最终仍然转化为距离问题解决.而发现中点将成为下述新问题探究表

达的重要视角,提供思维的进阶台阶,帮助学生学会朝着有意义的角度审查问题,提升思维的深刻性.另外,引进新的工具——圆,是为了帮助学生更好地综合自己所学的基础知识,更深刻地理解基础图形的重要建模作用.

6　锁定探究方向,跨阶活动经验

二轮复习侧重思想方法的渗透,需要引导学生由问题出发,借助理性经验分离出核心问题,然后再展开对核心问题的探究.代数类探究专题需由简到繁设置,问题的推进也逐步转化到含有参数,让问题活起来,让图形动起来,在变化中锁定不变的核心策略,在运动中锁定动态的变化规律.在这一轮活动中,着重培养学生活动经验的融汇整合,在新的探究活动中跨越问题表面进行理性认知,深锁探究方向,化动为静.从数学思维角度看,此时活动经验更有利于提升学生思维的逻辑性.

变式2(验证总结)　已知点$A(m,0)$,$B(m+4,0)$,以点$C(3,3)$为圆心、半径为1的圆上有一动点P,求PA^2+PB^2的最小值.

设计意图:将点A、B从已知点变式为含参点,只含有一个参数,进行一般性验证.这里对学生而言,最艰难的是在表达PA^2+PB^2过程中,需要对含有参数m的代数式进行配方,也是为了借助新问题激发学生对初中阶段重要运算的重视,引导学生打好运算基础.将这些基础运算、基础图形作为学习数学的重点进行日常渗透,通过数学基础知识引导学生解决新题、难题,学会转化,强化逻辑关联,重视运算,从数形结合视角看形变与数变、式变.另外,从一般性视角验证了PA^2+PB^2最终也转化为两点间距离问题,统一认识,明确方向,为后续更深层次变形提供经验支持.

7　借助探究方向,破阶活动经验

探究方向是通过活动序列逐步确定的,从引例问题的出现到系列变式,都在逐步引导学生锁定问题的核心模型,解锁解决问题的核心策略,探究方向的确定更有利于学生感知数学经验的价值.二轮复习引导性较强,学生主要从破除探究障碍、提升认知水平层面进行经验积累.经过以上六个活动环节的探究体验,学生已经可以内化活动经验,达到活动经验的自由运用.从数学思维角度看,此时数学经验的形成更有利于促进思维的灵活性、敏捷性.

变式3(拓展求新)　已知线段AB是长度为4的线段,点A在x轴上运动,点B在y轴上运动,一动点P在直线$y=-x+4$上运动,求PA^2+PB^2的最小值.

设计意图:将点A、B从已知点变式为任意点,进行更一般性的验证.这里对学生而言,最艰难的也是在表达PA^2+PB^2过程中,需要首先假设动点$P(x,y)$,其次还要假设$A(a,0)$,$B(b,0)$,然后对含有参数a、b及未知数x、y的代数式进行配方,涉及字母较多,挑战性较大.但也正因如此,才能让学生一步一步类比发现,探究求真.有了之前的一系列例题作为引例,学生需要自己进入探究状态,自发朝着明确的方向进行求解,正是有了确定的探究方式和经过验证的猜想,学生才有勇气进行复杂的运算,探究数学实质,从而在解题逆境中培养出乐于探究的数学品质.要提醒学生特别关注转化思想,在此类问题解决过程中不断在代数、几何视角之间切换关联,且反复切换有利于促进学生思维的韧性.

8　明确探究方向,积累活动经验

代数专题研究重在探究,需明确探究方向,借助探究活动在数学思维力提升的同时积累活动经验,努力构建核心策略解决问题.从一类代数式x^2+y^2出发的研究探讨了这类代数表达式的若干解析视角,并在变化中选择适当策略进行问题解决.探究过程将数、式、形融为一体,综合方程、函数、图像性质,融合代数思想、几何解读,从具体问题入手,体会解决这类问题的代数思想与图形建构之间的内在联系.在这一类代数式的解析过程中不断积累多视角解析代数式、几何基本图形的经验,学会沿着数形结合加相互表达刻画的角度进行探究,循着代数表达的视角方向进行图形观察,朝着图形建构的方向进行代数式直观化表达,加强数式分析,强化数学建模意识,渐进式构造目标函数以解决问题(如图2所示).

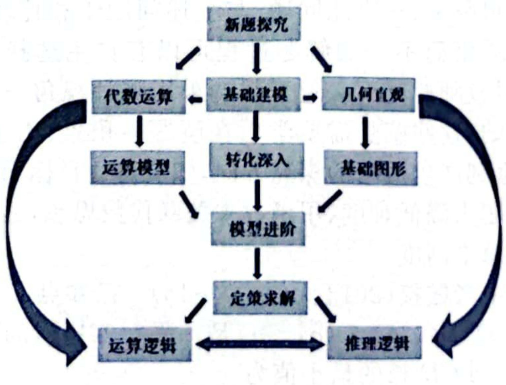


图2

在这一系列的探究过程中,最终方向是目标函数的建立,最终目标是活动经验的累积,这样的探究流程也可以改进后用于其他课型.

综上,中考数学二轮复习,专题为主,知识要综

(下转第53页)

$3 = 3\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^9$，

$(a_1a_2a_3)^3(a_1^3+a_2^3+a_3^3) = 2.710409576448 <$
$3 = 3\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^{12}$，

知当 $m=1$ 或 2，$n=k=3$ 时，猜想5不成立．而 $m=n=k=3$，不等式 $(a_1a_2a_3)^3(a_1^3+a_2^3+a_3^3) \leqslant 3\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^{12}$ 则有可能成立．

评注：让学生体会猜想可能成立，也可能不成立．一般地，对于猜想5中的不等式，当 $m=1$，$k=2$ 时，有以下结论．

结论9 设 $a_i>0(i=1,2,3,\cdots,n,n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$，则不等式 $\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant n\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{n+2}$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立（利用数学归纳法可以证明，过程略）．

借助现代化的研究方法，如利用电脑软件画出解集图像，可以获得一系列有趣的结果（证明略），批量发现新的不等式（证明略）．

结论10

(1) 设 $a,b>0$，则有 $\sqrt{ab}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})\leqslant 2\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^5$．

(2) 设 $a,b>0$，且 $a+b\geqslant 2$，则有 $\sqrt{ab}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})\leqslant 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$．

(3) 设 $a,b>0$，则有 $\sqrt{ab}(a^2+b^2)\leqslant 2\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{2}\right)^2$．

限于篇幅，其他结论不再一一列出．

五、结语

适当设计这样的“猜想—论证”数学探究活动，对于培养学生的数学核心素养是有利的．这类活动的开展需要有好的数学问题，让问题驱动探究．源源不断的新问题在探究进程中自然生成，促使学生主动融入探究活动中．

同时，用方法推进探究．如引导学生将解决问题2582的方法进行类比，应用到对新问题及数学思想、方法进行拓展的延伸探究上，提高了学生解决问题的综合思维能力．

探究的目的是让学生的数学思维进阶——从简单到复杂，有层次性地推进数学探究活动，促进学生的思维进阶．问题解决回归原点引导学生思维进阶，方法迁移变式拓展辅助思维进阶，数学方法和思想的渗透、提炼、应用等的全方位的思维体系进阶，提高了学生的创造思维、分析思维、数学表达等高阶思维能力．

参考文献

[1] 李盛，张中华，金迅婴．追根溯源，循脉拓展——《数学通报》数学问题2582的探究[J]．数学通报，2022(8)．
[2] 李世杰，李盛．不等式探秘[M]．哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017：37-38．
[3] 宋庆．玩转不等式(8)[EB/OL]．http://blog.sina.com.cn/s/blog_4c11310201019soi.html．

（上接第44页）

合，方法要融合．即使已经到了二轮复习，仍然要基于新问题探究的视角、知识与方法关联的视角、模型建立与模型进阶的视角，基础依旧是关键．对一些基础知识、基础方法，不可割裂地看待，要关联、对比．在每一次的问题解决中都要留机会让学生巩固基础、试用方法，以问题引导学生由浅入深地思考问题、剖析问题、转化问题，找出探究方向，确定解决路径，着力积累活动经验．所以，这一轮的专题问题要精挑细选，要改编甚至原创，激发学生创新克难的意志力，渐进式积累探究经验．

另外，要强调代数思想方法的作用．数学学习崇尚简洁，学习代数思想及其解题方法是为了从数与式的角度简单解析数学对象，学习几何是为了从图形的角度直观地图形化数式对象，二者结合才能更直观简洁．所以，当综合问题呈现时，学生必须有将数学对象量化的思维意识，有将具体对象模型化的数学水准，有将数学新问题转化的探究方向．函数思想恰好是在几何与代数之间做了穿针引线工作，由此建立数、式关联的函数模型，将数量与图形建立关联，明确方向，引领深入探究．因而，要强化和重视初中阶段函数的学习和应用，只有这样才能让数学经验传承、让数学对象简洁、让数学思维生长并优化．

参考文献

[1] 罗增儒．数学课堂的变迁[J]．中学数学教学参考（中旬），2021(4)：2-10．
[2] 郑毓信．聚焦“习题教学”——“复归”后的感受与思考[J]．中学数学教学参考（中旬），2021(5)：2-4．

上海市延安中学简介

学校风采

上海市延安中学前身是上海市真如中学，成立于 1946 年，至今已有 77 年的办学历史。

1949 年学校迁至大西路（今延安西路 601 号），1954 年更名为上海市延安中学。1960 年被定为上海市重点中学。1979 年邓小平同志亲笔为学校题写了校名。1998 年学校迁至茅台路 1111 号。学校绿化面积近 40%，是上海市花园单位。设置了科技教育、体育教育、艺术教育、心理指导和信息技术教育等五个功能区，是上海中心城区规模最大、设施最新的学校之一。

上海市延安中学在 2004 年被命名为首批上海市实验性示范性学校，为现代化全寄宿制高级中学。学校现有 33 个教学班，千余名在读学生。有在职教师 142 人，其中正高级教师 5 人，高级教师 63 人。学校有特级校长 2 人，特级教师 7 人；教师中有全日制博士研究生 11 人，全日制硕士研究生 33 人，在职教育硕士 28 人。

办学特色

保持传统。上海市延安中学坚持“老老实实办学，呕心沥血育人”的延安办学传统。学校因红色文化而有温度，因历史传承而有厚度，因内涵丰富而有深度，因办学理念而有高度。

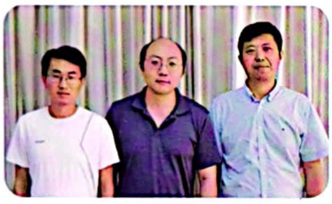
发展内涵。学校继承传统又与时俱进，形成了以“延安”为内涵的办学理念。

以“延”为育人途径：基于知识与技能的延伸性学习，使学生通过实践体验“学以致用”；基于问题与任务的延伸性学习，使学生通过探索发现“学以致思”；基于创新与创造的延伸性学习，使学生通过研究性学习“学以致创”。

以“安”为育人目标：使学生学会做人、学会健身以安身立命；学会学习以安贫乐道；学会做事以安邦定国。

（下转封三）

区第九轮学科带头人（左起）：刘霞倩、于在洋、吴瑾辉



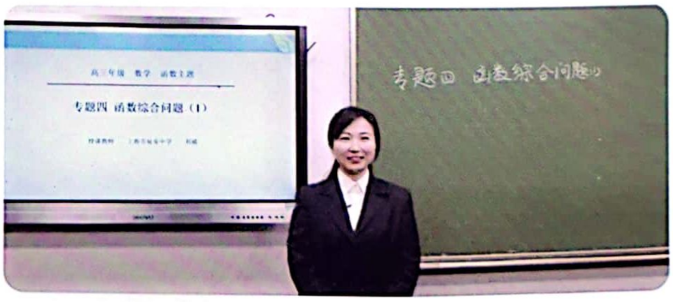
数学竞赛辅导教师（左起）：丁虬骋、周海宁、于在洋

数学备课组长（左起）：刘威、周海宁、刘霞倩

数学建模辅导教师（左起）：陶勍、冯镇国

数学组全体教师合影

李德元校长在 2023 届毕业典礼上致辞



刘威老师在“空中课堂”讲授“函数综合问题”

吴瑾辉老师在“空中课堂”讲授“等差数列”

国内发行代号：4-369
国外发行代号：BM5400
ISSN 1672-7495
CN 31-1572/G4
定价：18.00 元