4 方程与不等式的应用

方程

17世纪，法国数学家笛卡尔曾有过一个伟大的设想：把所有问题 $\xrightarrow{\text{化归}}$ 数学问题 $\xrightarrow{\text{化归}}$ 代数问题 $\xrightarrow{\text{化归}}$ 方程问题.

虽然笛卡尔的理想在他的一生中未能实现，但随着计算机的广泛应用，人们已经越来越体验到方程思想的重要性.

方程组的应用

1、求代数式的值

一些表面与方程组无关的问题，借助相关概念、性质、对题意的理解等将问题转化为解方程组而获解.

2、列方程组解应用题

不同的应用问题应采用不同的解决手段或方法，对于含有多个未知量的问题，利用方程组求解常常比单设一个未知数建立一元方程容易.

典型例题

例 1. 已知实数 x，y 满足 $\frac{4}{x^4}-\frac{2}{x^2}=3$，$y^4+y^2=3$，则 $\frac{4}{x^4}+y^4$ 的值为(　　)

A.7　　B. $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$　　C. $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$　　D. 5

变式 1： 已知 $\frac{xy}{x+y}=2$，$\frac{xz}{x+z}=3$，$\frac{yz}{y+z}=4$，求 $7x+5y-2z$ 的值.

变式 2： 自然数 n 满足 $\left(n^2-2n-2\right)^{n^2+47}=\left(n^2-2n-2\right)^{16n-16}$，这样的 n 的个数是（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

例2. 有甲、乙、丙三种规格的钢条，已知甲种2根，乙种1根，丙种3根，共长23米；甲种1根，乙种4根，丙种5根，共长36米，问甲种1根、乙种2根、丙种3根，共长多少米？

变式1： 星期天，妈妈带着小丁去买了2斤苹果和6斤橘子，共用去12元，妈妈说："上星期天也是买了2斤苹果和6斤橘子，也是花了12元，可是今天的苹果价格下调了，橘子价格上涨了，并且上涨和下调的幅度相同."试求上星期天苹果和橘子每斤的价格.

变式 2：甲、乙两地分别在河的上、下游，每天各有一班船准点以匀速从两地对开，通常它们总在 11 时于途中相遇，一天乙地的船因故晚发了 40 分钟，结果两船在上午 11 时 15 分在途中相遇，已知甲地开出的船在静水中的速度数值为 44 千米/时，而乙地开出的船在静水中的速度为水流速度 v 千米/时数值的平方，则 v 的值为____________.

例 3. 一个批发与零售兼营的文具店规定：凡一次购买铅笔 301 支以上（包括 301 支），可以按批发价付款；购买 300 支以下（包括 300 支）只能按零售价付款. 现有学生小王来购买铅笔，如果给学校初三年级每人买 1 支，则只能按零售价付款，需用（m^2-1）元（m 为正整数，且 m^2-1＞100）；如果多买 60 支，则可以按批发价付款，同样需用（m^2-1）元.

（1）设这个学校初三年级共有 x 名学生，则① x 的取值范围是____________；②铅笔的零售价每支应为____________元，批发价每支应为__________元.（用含 x，m，n 的代数式表示）

（2）若按批发价每购买 15 支，比按零售价每购 15 支少付款 1 元，试求这个学校初三年级共有多少名学生，并确定 m 的值.

变式 1：小明有 5 张人民币，面值合计 20 元.

（1）小明的 5 张人民币的面值分别是______元、______元、______元、______元、______元.

（2）小明来到水果店，称了 x 公斤苹果（x 是整数），按标价应付 y 元，正好等于小明那5张人民币中的2张面值之和；这时果筐里还剩6公斤苹果，店主便对小明说："如果你把这剩下的也都买去，那么连同刚才已经称的，一共就付10元钱吧。"小明一算，这样相当于每公斤比原标价减少了0. 5元，本着互利原则，便答允了，试求 x 和 y.

变式2：象棋比赛共有奇数个选手参加，每位选手都同其他选手比赛一盘. 记分办法是胜一盘得1分，和一盘各得0. 5分，负一盘得0分. 已知其中两名选手共得8分，其他人的平均分为整数，参加此次比赛的选手共有多少人？

例 4. 小王沿街匀速行走，发现每隔 6 分钟从背后驶过一辆 18 路公交车，每隔 3 分钟从迎面驶来一辆 18 路公交车，假设每辆 18 路公交车行驶速度相同，并且 18 路公交车总站每间隔固定时间发一辆车，那么发车间隔的时间是__________分钟.

变式 1：七年级93 个同学在4 位老师的带领下准备到离学校33 千米处的某地进行社会调查，可是只有一辆能坐25 人的汽车．为了让大家尽快地到达目的地，决定采用步行与乘车相结合的办法. 如果你是这次行动的总指挥，你将怎样安排他们乘车，才能使全体师生花最短的时间到达目的地?最短的时间是多少?（师生步行的速度是5 千米 / 时，汽车的速度是55 千米 / 时，上、下车时间不计．）

变式 2：今有 12 名旅客要赶往40 千米远的汉口新火车站去乘火车，离开车时间只有 3 小时，他们步行的速度为每小时4 千米，靠走路是来不及了，惟一可以利用的交通工具只有一辆小汽车，但这辆汽车连司机在内最多只能乘 5 人，汽车的速度为每小时 60 千米，若这 12 名旅客 必须要赶上这趟火车，请你设计一种方案，帮助司机把这 12 名旅客及时地送到汉口火车站 （不考虑借助其他交通工具）.

例 5. 在车站开始检票时，有 a（$a>0$)名旅客在候车室排队等候检票进站，检票开始后，仍有旅客继续前来排队检票进站，设旅客按固定的速度增加，检票口检票的速度也是固定的.若开放一个检票口，则需 30 分钟才可将排队等候检票的旅客全部检票完毕；若开放两个检票口，则只需 10 分钟便可将排队等候检票的旅客全部检票完毕；如果要在 5 分钟内将排队等候检票的旅客全部检票完毕，以使后来到站的旅客能随到随检，至少要同时开放几个检票口？

引例：一个牧场长满青草，牛在吃草而草又在不断生长，已知牛 27 头，6 天把草吃尽，同样一片牧场，牛 23 头，9 天可以把草吃尽。如果有牛 21 头，几天能把草吃尽？

变式：江堤边一洼地发生了管涌，江水不断的涌出，假定每分钟涌出的水量相等，如果用两台抽水机抽水，40分钟可抽完；如果用4台抽水机抽水，16分钟可抽完，如果要在10分钟抽完水，那么至少需要抽水机_台．

方程与不等式结合

许多数学问题和实际问题所求的未知量往往受到一些条件的限制，可以通过数量关系和分析，列出不等式(组)，运用不等式的有关知识予以求解，不等式(组)的应用主要体现在：

1．作差或作商比较有理数的大小．

2．求代数式的取值范围．

3．求代数式的最大值或最小值．

4．列不等式(组)解应用题．

列不等式(组)解应用题与列方程(组)解应用题的步骤相仿，关键是在理解题意的基础上，将一些词语转化为不等式．

例1.如果关于 x 的方程 $\left|m^2x\right|-x-1=0$ 只有负根，那么 m 的取值范围是________．

变式：已知$A=-\dfrac{1998\times1999}{2000\times2001}$，$B=-\dfrac{1998\times2000}{1999\times2001}$，$C=-\dfrac{1998\times2001}{1999\times2000}$，则有(　　)．

A．$A>B>C$　　B．$C>B>A$　　C．$B>A>C$　　D．$B>C>A$

例2.已知 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7 是彼此不相等的正整数，它们的和等于159，求其中最小数 a_1 的最大值．

变式1：一玩具厂用于生产的全部劳力为450个工时，原料为400个单位，生产一个小熊玩具要使用15个工时、20个单位的原料，售价为80元；生产一个小猫玩具要使用10个工时、5个单位的原料，售价为45元．在劳力和原料的限制下合理安排生产小熊玩具、小猫玩具的个数，可以使小熊玩具和小猫玩具的总售价尽可能高．请用你所学过的数学知识分析，总售价是否可能达到2 200元．

变式2：某钱币收藏爱好者想把3.50元纸币兑换成1分，2分，5分的硬币，他要求硬币总数为150枚，且每种硬币不少于20枚，5分的硬币多于2分的硬币，请你据此设计兑换方案．

课后练习：

1. 某商店出售甲、乙两种商品，售价都是 1800 元，其中，甲商品能盈利 20%，乙商品将亏损 20%，如果同时售出甲、乙商品个一件，那么（　　）

A 、共盈利 150 元　　B、共亏损 150 元　　C、不盈利也不亏损　　D、以上答案都不对

2. 方程$|x-2y-3|+|x+y+1|=1$的整数解得个数是（　　）

A 、1 个　　B、2 个　　C、3 个　　D、4 个

3. 甲是乙现在的年龄时，乙 10 岁；乙是甲现在的年龄时，甲 25 岁，那么（　　）

A 、甲比乙大 5 岁　　B、 甲比乙大 10 岁　　C、 乙比甲大 10 岁　　D、乙比甲大 5 岁

4．若$a+b=-2$，且$a\geq 2b$，则(　　)

A．$\frac{b}{a}$有最小值$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{b}{a}$有最大值 1　　C．$\frac{a}{b}$有最大值 2　　D．$\frac{a}{b}$有最小值$-\frac{8}{9}$

5．设$P=\frac{2^{1989}+1}{2^{1990}+1}$，$Q=\frac{2^{1990}+1}{2^{1991}+1}$，则 P，Q 的大小关系是（　　）

A．$P>Q$　　B．$P<Q$　　C．$P=Q$　　D．不能确定

6. 若方程$249x+\frac{a}{8}|x|-1=0$的解小于零，则a的取值范围是__________.

7. a，b，c，d是正整数，且$a+b=20$，$a+c=24$，$a+d=22$，设$a+b+c+d$的最大值为 M，最小值为 N，则 $M-N=$_________.

8．一个盒子里装有红、黄、白三种颜色的球，若白球至多是黄球的$\frac{1}{2}$，且至少是红球的$\frac{1}{3}$，黄球与白球合起来不多于 55 个，则盒子中至多有红球__________个.

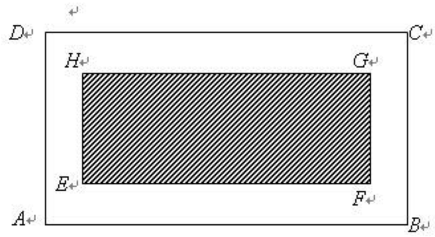
9.在一次汽车比赛中，有三辆汽车在起点同时同向出发，其中第二辆车每小时辆车比第一辆车少走 5 公里，而比第三辆车多走 7. 5 公里；第二辆车到达终点比第一辆车迟 3 分钟，而比第三辆车早到 5 分钟. 假设它们在路上都没停过.

（1）比赛的路程是多少公里？

（2）第二辆车的速度是每小时多少公里？

9. 甲、乙、丙三人各有糖若干块，要求相互赠送，先由甲给乙、丙，所给的糖的块数等于乙、丙原来各自的糖块数，依同样的方法再由乙给甲、丙现有的糖块数；后由丙给甲、乙现有的糖块数，相互赠送后，每人恰好各有糖 64 块，问三人原来各有糖多少块？

11. 如图，有矩形地 $ABCD$ 一块，要在中央修建一矩形 $EFGH$ 花圃，使其面积为这块地面积地一半，且花圃四周的道路宽相等. 今无测量工具，只有无刻度的尺和够长的绳子一条，如何量出道路的宽度？



12. 求满足下列条件的所有四位数：$\overline{abcd}$: $\overline{abcd}=(\overline{ab}+\overline{cd})^2$, 其中数码 c 可以为0.